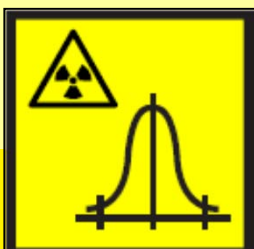


Unsicherheit, Nachweisbarkeit und Konformität

Rolf Michel



9. RCA-Workshop vom 15.-17. Juni 2020

Inhalt

- **Die aktuelle Situation in der Metrologie**
 - ❖ **VIM, GUM, GUM Supplement 1, ...**
- **Was ist Unsicherheit?**
- **Statistische Grundlagen**
 - ❖ **Frequentistische und Bayes-Statistik**
 - ❖ **Eine Bayessche Theorie der Messunsicherheit**
- **Nachweisbarkeit unter Unsicherheit**
 - ❖ **Charakteristische Grenzen nach ISO 11929**
- **Was ist Konformität unter Unsicherheit?**
 - ❖ **Toleranz- und Konformitätsbereich**
 - ❖ **Konformität und falsche Entscheidungen**
- **SSK Empfehlung zur Beurteilung von Konformität**
- **Literatur**

VIM

JCGM 200:2008

International vocabulary of
metrology — Basic and general
concepts and associated terms
(VIM)

Vocabulaire international de
métrologie — Concepts
fondamentaux et généraux et
termes associés (VIM)



JCGM
Joint Committee for
Guides in Metrology
(BIPM, IEC, IFCC,
ILAC, ISO, IUPAC,
IUPAP and OIML)

Free download under www.bipm.org

R. Michel, IRS, Leibniz Universität Hannover

GUM

JCGM 100:2008

GUM 1995 with minor corrections

Evaluation of measurement
data — Guide to the expression
of uncertainty in measurement

*Évaluation des données de mesure —
Guide pour l'expression de l'incertitude de
mesure*



JCGM

**Joint Committee for
Guides in Metrology
(BIPM, IEC, IFCC,
ILAC, ISO, IUPAC,
IUPAP and OIML)**

Free download under www.bipm.org

R. Michel, IRS, Leibniz Universität Hannover

JCGM 101:2008

BIPM

Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Propagation of distributions using a Monte Carlo method

Évaluation des données de mesure — Supplément 1 du “Guide pour l’expression de l’incertitude de mesure” — Propagation de distributions par une méthode de Monte Carlo

ΜΕΤΡΩ ΧΡΩ

GUM Supplement 1



JCGM
Joint Committee for
Guides in Metrology
(BIPM, IEC, IFCC,
ILAC, ISO, IUPAC,
IUPAP and OIML)

Free download under www.bipm.org

R. Michel, IRS, Leibniz Universität Hannover

Einige Grundlagen der Metrologie

Seien X_i Größen, deren wahren Werte \tilde{x}_i unsicher sind.

Das Modell der Auswertung ist gegeben durch:

$$Y = G(X_1, \dots, X_n)$$

Dabei ist Y die Ergebnisgröße und die X_i die Eingabe-
größen. Es wird angenommen, dass das Modell sinnvoll
ist, sodass für die wahren Werte gilt:

$$\tilde{y} = G(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$$

Ein Schätzwert y von \tilde{y} wird erhalten durch Einsetzen der
Schätzwerte x_i der \tilde{x}_i in die Modell Gleichung:

$$y = G(x_1, \dots, x_n)$$

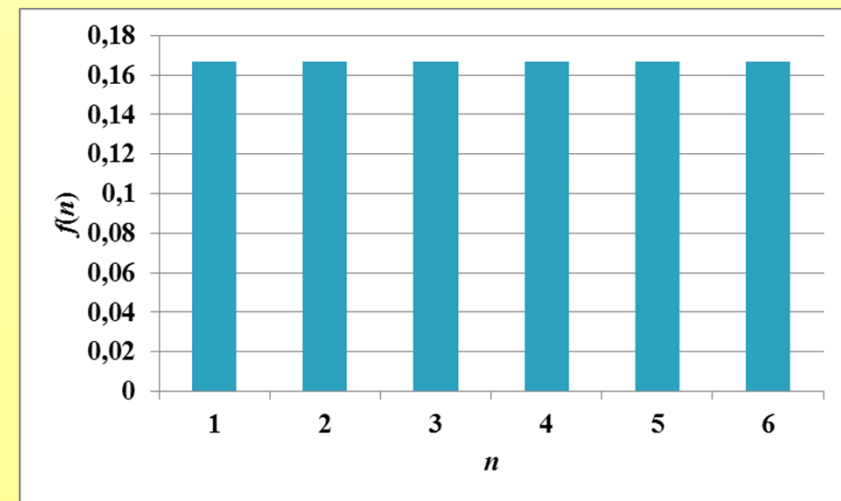
Was ist Unsicherheit?



..., dass ich nicht weiß, wie der Würfel fallen wird.

Ich kann nur eine Wahrscheinlichkeit angeben.

Die vollständige Beschreibung der Unsicherheit: eine PDF.



Die Quantifizierung der Unsicherheit: eine PDF (probability density function)

$$f(\tilde{y}|y, \mathfrak{I})$$

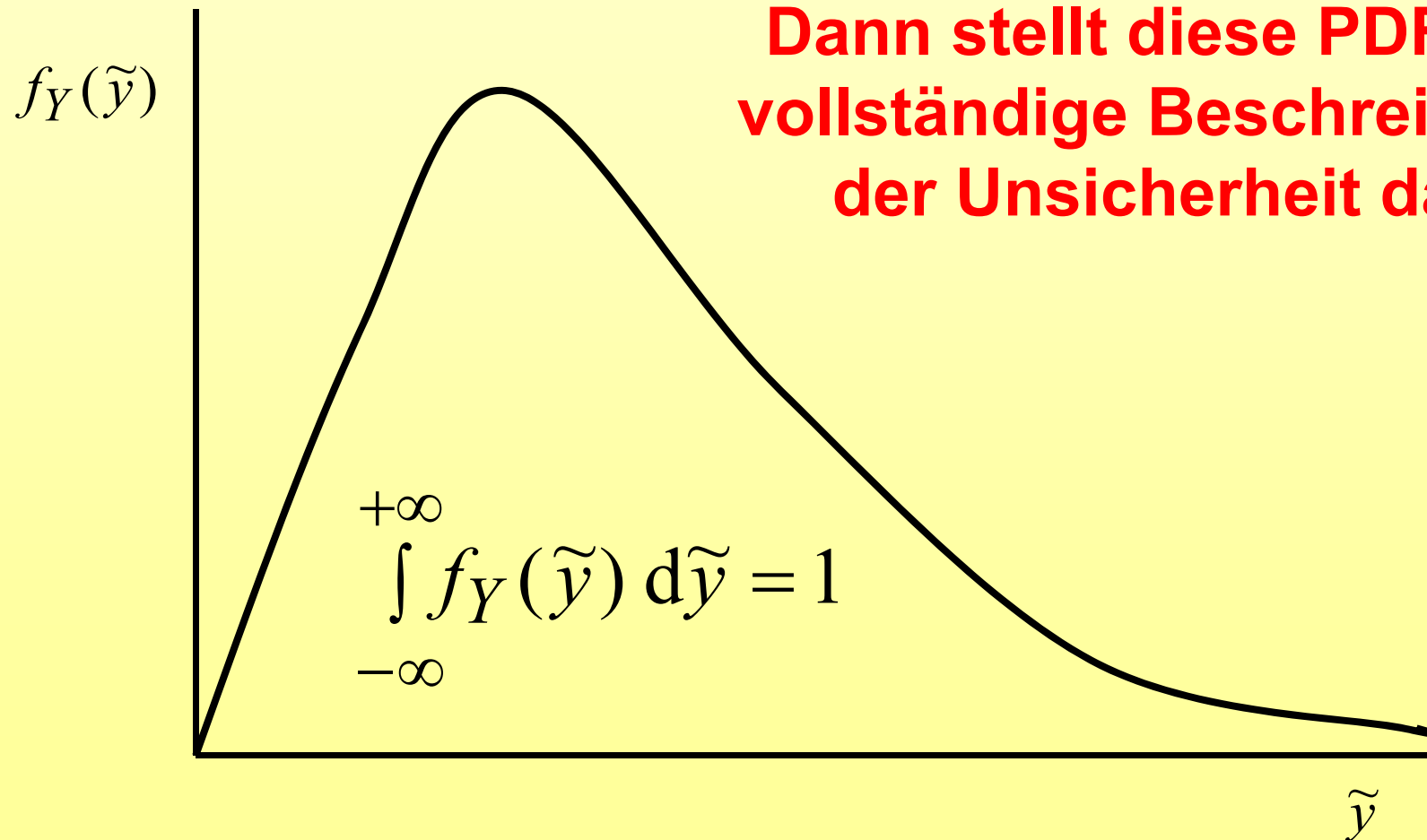
\tilde{y} **Wahrer Wert der Messgröße, unbekannt
und unerkennbar**

y **Messwert**

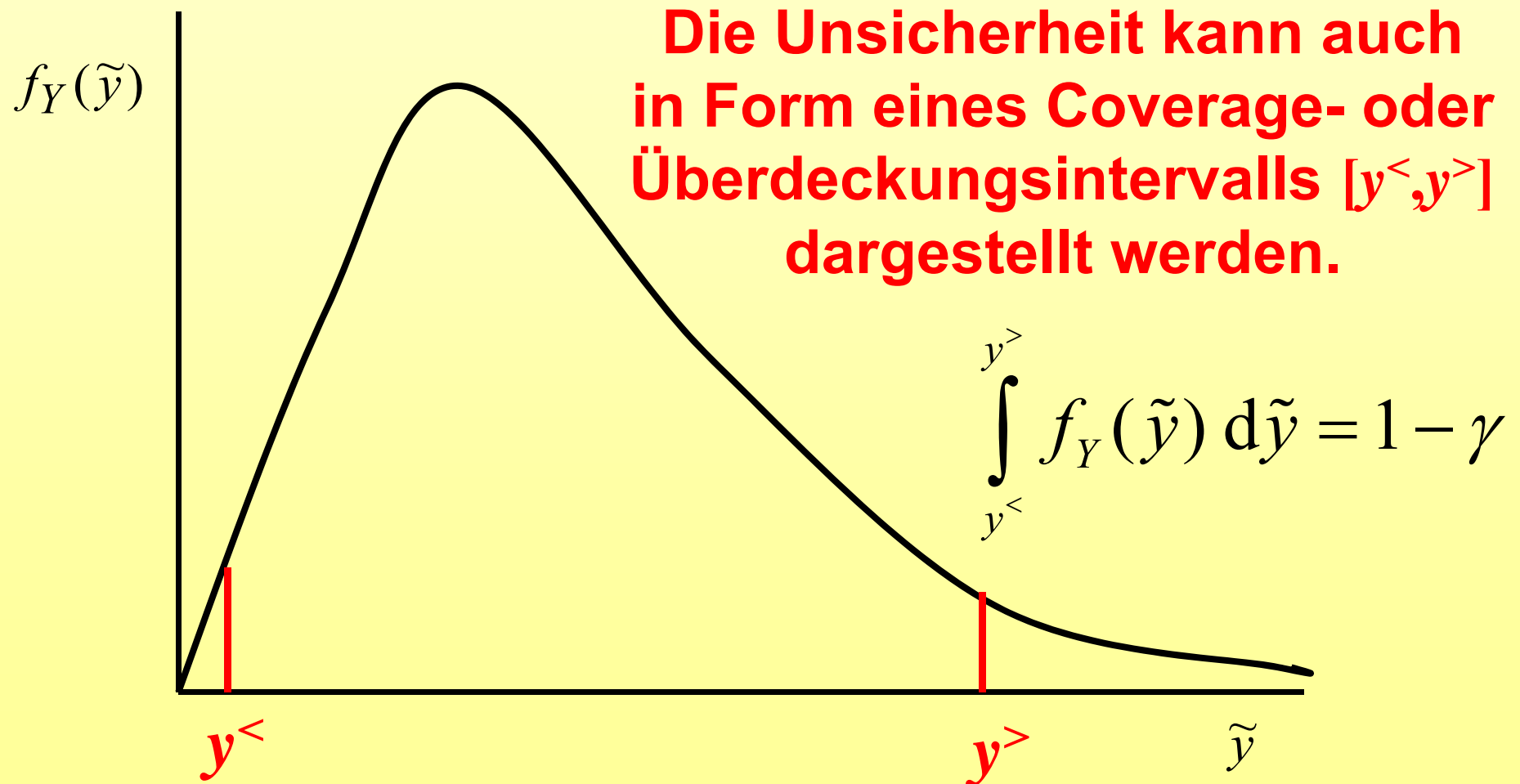
\mathfrak{I} **Jede ansonsten verfügbare Information**

**Sei $f_Y(\tilde{y})$ die PDF einer Zufallsvariable,
die als Schätzer von Y dient**

**Dann stellt diese PDF die
vollständige Beschreibung
der Unsicherheit dar.**



Sei $f_Y(\tilde{y})$ die PDF einer Zufallsvariable,
die als Schätzer von Y dient



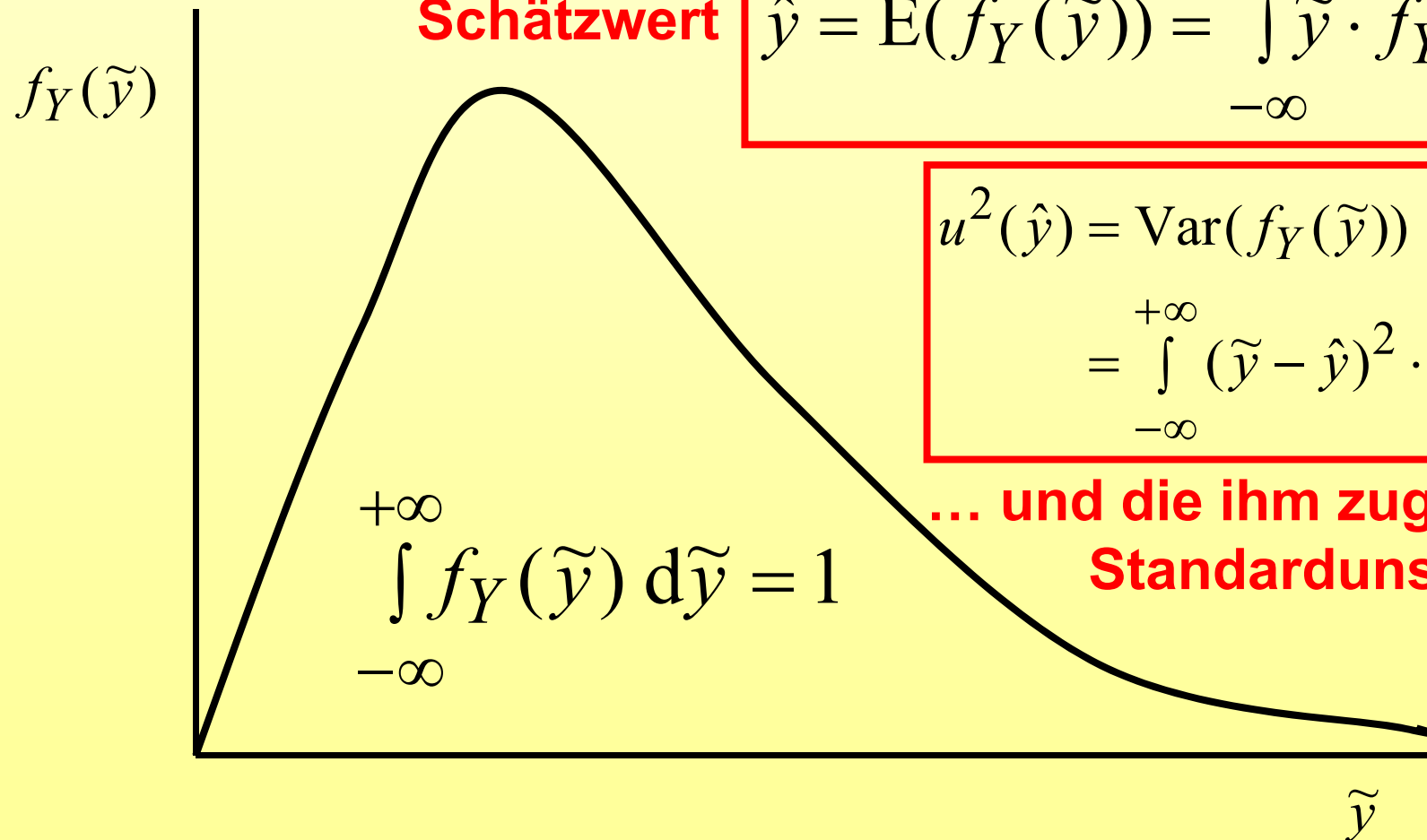
Sei $f_Y(\tilde{y})$ die PDF einer Zufallsvariable,
die als Schätzer von Y dient

**Der beste
Schätzwert**

$$\hat{y} = E(f_Y(\tilde{y})) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{y} \cdot f_Y(\tilde{y}) d\tilde{y}$$

$$\begin{aligned} u^2(\hat{y}) &= \text{Var}(f_Y(\tilde{y})) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{y} - \hat{y})^2 \cdot f_Y(\tilde{y}) d\tilde{y} \end{aligned}$$

**... und die ihm zugeordnete
Standardunsicherheit**



Messunsicherheit, Unsicherheit, Standardunsicherheit

Parameter zur Charakterisierung der Dispersion
der (wahren) Werte einer Messgröße, die
aufgrund der vorhandenen Information der
Messgröße zugeordnet werden kann:

$$u(y)$$

International vocabulary of basic and general terms in metrology (VIM)
— Third edition, ISO/IEC 2007.

Die PDF hängt von der verfügbaren Information ab !

- Der **GUM** machte noch keine klare Aussage zu seinen statistischen Grundlagen.
- Das **GUM Supplement 1** enthält klar die Aussage, dass der GUM auf der Grundlage der Bayes-Statistik abgeleitet ist.
- Das **GUM Supplement 1** benutzt das PME und das Bayes Theorem zur Ableitung verschiedener PDFs in Abhängigkeit von der verfügbaren Information.

Verfügbare Information

führt zu der PDF

Sinusoidal cycling between lower and upper limits a, b

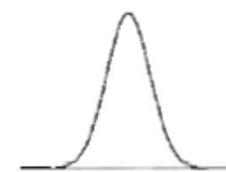
Arc sine (U-shaped):
 $U(a, b)$



GUM

Best estimate x and associated standard uncertainty $u(x)$

Gaussian:
 $N(x, u^2(x))$

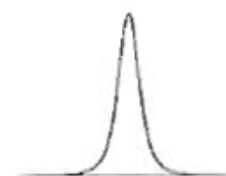


Best estimate x of vector quantity and associated uncertainty matrix U_x

Multivariate Gaussian:
 $N(x, U_x)$

Series of indications x_1, \dots, x_n sampled independently from a quantity having a Gaussian distribution, with unknown expectation and unknown variance

Scaled and shifted t :
 $t_{n-1}(\bar{x}, s^2/n)$ with $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$,
 $s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2/(n-1)$



Messunsicherheiten nach dem GUM

Einem Messwert y ist eine Messunsicherheit $u(y)$ zugeordnet.

Der ISO-Guide unterscheidet zwei Arten, wie Messunsicherheiten ermittelt werden:

Typ A und **Typ B**.

Typ A Unsicherheiten werden als Standardabweichungen aus mehrfach wiederholten Messungen oder aus zählenden Messungen, z.B. über $u^2(n) = n$, ermittelt.

Typ B Unsicherheiten stammen aus anderen Quellen.

Standardmessunsicherheit nach dem GUM

Für ein Modell der Auswertung $y = G(x_i, i = 1, \dots, m)$ berechnet man die einem Messergebnis y zugeordnete Standardunsicherheit $u(y)$ mit den Sensitivitätskoeffizienten c_i und den Kovarianzen $u(x_i, x_j)$ bzw. den Standardunsicherheiten $u(x_i)$ der x_i und den Korrelationskoeffizienten $r(x_i, x_j)$:

$$u^2(y) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial G}{\partial X_i} \frac{\partial G}{\partial X_j} u(x_i, x_j)$$

$c_i \equiv \partial G / \partial X_i$

$$= \sum_{i=1}^m c_i^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m c_i \cdot c_j \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j)$$

Die GUM-Messunsicherheiten sind das Ergebnis einer nach dem ersten Glied abgebrochenen Taylorreihenentwicklung normalverteilter PDFs.

Verfügbare Information

führt zu der PDF

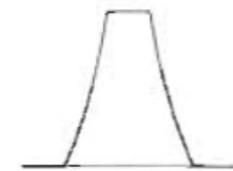
Lower and upper limits a, b

Rectangular:
 $R(a, b)$



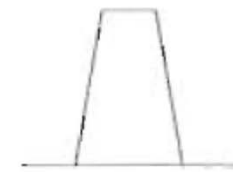
Inexact lower and upper limits $a \pm d$,
 $b \pm d$

Curvilinear trapezoid:
 $C\text{Trap}(a, b, d)$



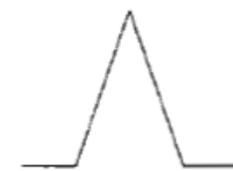
Sum of two quantities assigned rectangular distributions with lower and upper limits a_1, b_1 and a_2, b_2

Trapezoidal:
 $\text{Trap}(a, b, \beta)$ with $a = a_1 + a_2$,
 $b = b_1 + b_2$,
 $\beta = |(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)| / (b - a)$



Sum of two quantities assigned rectangular distributions with lower and upper limits a_1, b_1 and a_2, b_2 and the same semi-width ($b_1 - a_1 = b_2 - a_2$)

Triangular:
 $T(a, b)$ with $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$

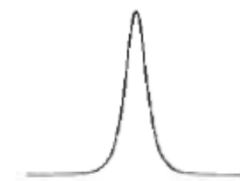


Verfügbare Information

führt zu der PDF

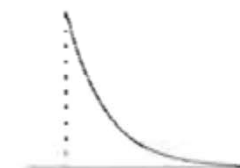
Best estimate x , expanded uncertainty U_p , coverage factor k_p and effective degrees of freedom ν_{eff}

Scaled and shifted t :
 $t_{\nu_{\text{eff}}}(x, (U_p/k_p)^2)$



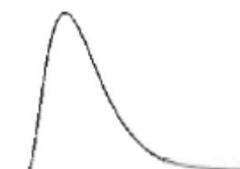
Best estimate x of non-negative quantity

Exponential:
 $\text{Ex}(1/x)$



Number q of objects counted

Gamma:
 $G(q + 1, 1)$



... und es gibt empirische PDFs aus früheren Auswertungen.

Free download under www.bipm.org

Statistische Grundlagen: ein Problem mit dem GUM

Die derzeitigen Anwender des GUM leben noch
in zwei verschiedenen Welten:

Der Welt der Bayes Statistik und
der Welt der frequentistischen Statistik.

**Der Begriff Wahrscheinlichkeit
hat in den beiden Welten der Statistik
nicht die gleiche Bedeutung !!!**

Obwohl viele Ergebnisse der beiden Statistiken
nahezu gleich sind, dürfen sie nicht miteinander
verwechselt oder vermischt werden.

Frequentistische und Bayessche Wahrscheinlichkeit

Die frequentistische Ansicht ist:

Wahrscheinlichkeit ist der stochastische Grenzwert relativer Häufigkeiten.

Die Bayessche Ansicht ist:

Wahrscheinlichkeit ist ein Maß für das Vertrauen, dass ein Individuum in die Gültigkeit einer unsicheren Annahme setzt.

Würfeln mit Bayesianern und Frequentisten

Frage:

**Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit
eine „6“ zu würfeln?**

Antwort des Bayesianers:

$1/6$

Antwort des Frequentisten:

**Ich weiß es nicht,
ich habe noch nicht gewürfelt.**

Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten

- Nicht jede Häufigkeitsverteilung (frequency distribution) kann als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden.
- Nicht jede Wahrscheinlichkeit kann mittels einer Häufigkeit beschrieben werden.



Ein Problem
mit der frequentistischen Statistik:

Wie soll man Typ B Unsicherheiten
berücksichtigen?

Es ist unmöglich !!!

Nur Bayes-Statistik kann Typ B
Unsicherheiten berücksichtigen.

Bayesianer ...

... sind der Überzeugung, **dass die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie anwendbar ist auf das Maß für das Vertrauen, dass ein Individuum in die Gültigkeit einer unsicheren Annahme setzt.**

Bayesianer sind auch der Ansicht, dass das Bayessche Theorem benutzt werden kann, um die Wahrscheinlichkeit der Gültigkeit einer Hypothese angesichts neuer, relevanter Information erneut zu berechnen — diese Schlussweise nennt man **Bayessches Schließen.**

In diesem Sinne ist **Bayesianismus** eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und eine Interpretation der Begriffe **wahrscheinlich** und **Wahrscheinlichkeit.**

Thomas Bayes (* 1702 † 1761)



1763:

„Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances“

„Bayesian estimation“, i.e. calculating the probability of the validity of a proposition on the basis of a prior estimate of its probability and new relevant evidence.

$$f(\tilde{y}|y, \mathfrak{I}) = C \cdot f(y|\tilde{y}) \cdot f(\tilde{y}|\mathfrak{I})$$

posterior

likelihood

prior

E.T. Jaynes

Probability Theory: The Logic of Science

Das *Prinzip der maximalen
(Informations-) Entropie (PME)*
fordert

$$S = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(\tilde{y}|y) \cdot \ln f_Y(\tilde{y}|y) d\tilde{y} = \max$$



5.7.1922 – 30.4.1998

Aufstellen und Aktualisieren von Verteilungen

Prinzip der maximalen Informationsentropy (PME)

$$S = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(\tilde{y}|y) \cdot \ln f_Y(\tilde{y}|y) d\tilde{y} = \max$$

Bayes Theorem

$$f(\tilde{y}|y, \mathfrak{I}) = \frac{f(y|\tilde{y}, \mathfrak{I}) \cdot f(\tilde{y}|\mathfrak{I})}{f(y|\mathfrak{I})}$$

$$f(\tilde{y}|y, \mathfrak{I}) \propto f(y|\tilde{y}, \mathfrak{I}) \cdot f(\tilde{y}|\mathfrak{I})$$

Produktregel (GUM)

$$f(\tilde{y}|y, \mathfrak{I}) \propto f(\tilde{y}|y) \cdot f(\tilde{y}|\mathfrak{I})$$

\tilde{y} Wahrer Wert der Messgröße

y Messergebnis

I Sonstige Information

GUM Ansatz mittels Bayes-Statistik

Das Prinzip der maximalen Informationsentropie (Jaynes, 1982)

$$S = - \int f(\tilde{y}|y) \cdot \ln(f(\tilde{y}|y)) d\tilde{y} = \max$$

mit den **Nebenbedingungen**

$$y = E(f(\tilde{y}|y))$$

führt zur Lösung:

$$u^2(y) = \text{Var}(f(\tilde{y}|y))$$

$$f(\tilde{y}|y, \mathfrak{T}) = C \cdot f(\tilde{y}|\mathfrak{T}) \cdot \exp\left(-(\tilde{y} - y)^2 / (2 \cdot u^2(y))\right)$$

Dies ist weder eine Näherung noch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung in wiederholten oder zählenden Messungen.

GUM Ansatz mittels Bayes-Statistik

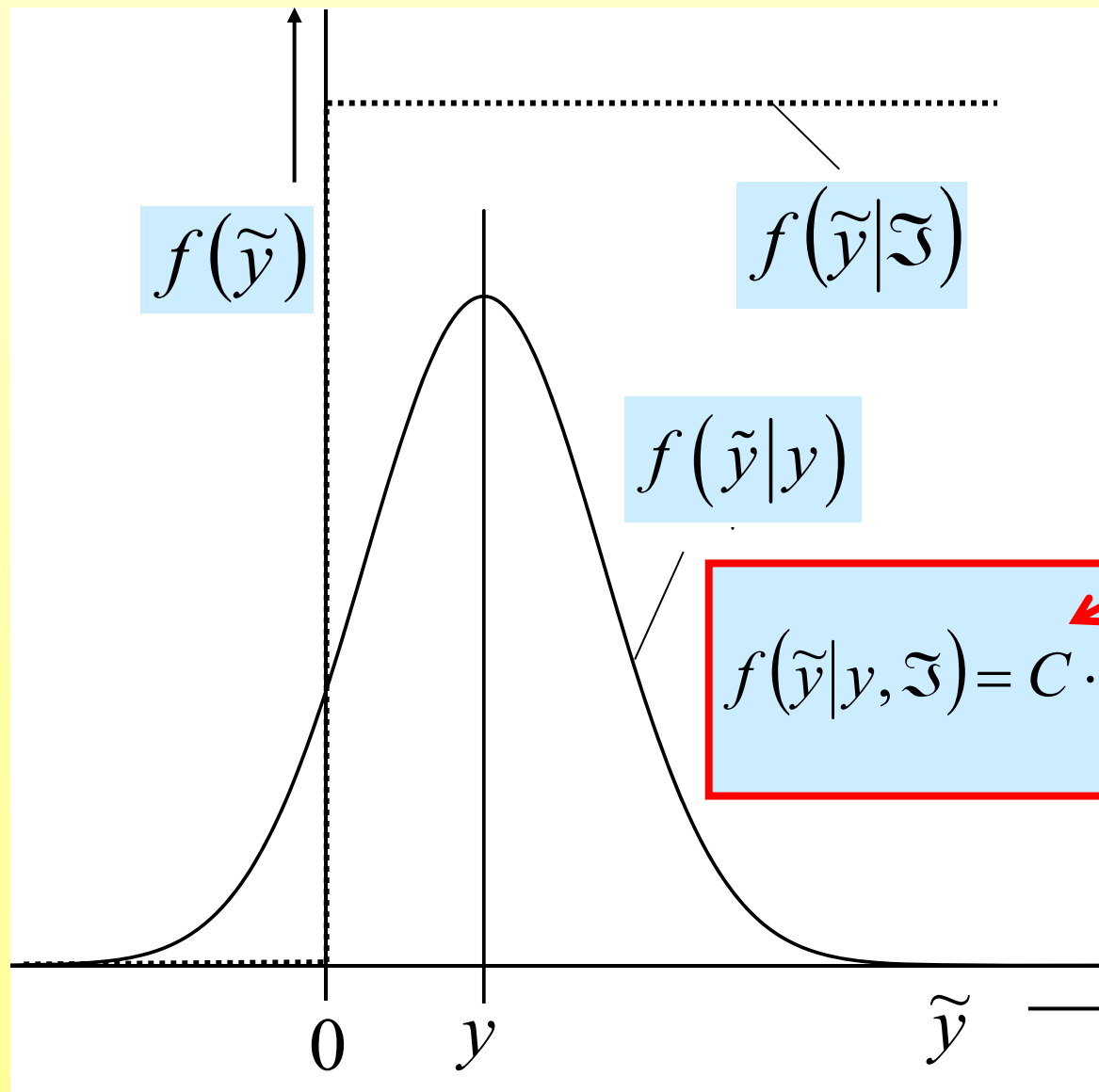
$f(\tilde{y}|\mathfrak{T})$ enthält alle Information, die vor Durchführung des Experimentes existiert; darum ist sie unabhängig von y .

Beispiel:

Der Modell-Prior für eine nicht negative Messgröße; die Heaviside Funktion:

$$\mathfrak{T} : \tilde{y} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(\tilde{y}|\mathfrak{T}) = H(y) = \begin{cases} \text{const} & (\tilde{y} \geq 0) \\ 0 & (\tilde{y} < 0) \end{cases}$$

$f(\tilde{y}|y, \mathfrak{T})$ für eine nicht negative Messgröße



**Renormalisierung
erforderlich!**

$$f(\tilde{y}|y, \mathfrak{T}) = C \cdot f(\tilde{y}|\mathfrak{T}) \cdot \exp\left(-\frac{(\tilde{y} - y)^2}{2 \cdot u^2(y)}\right)$$

INTERNATIONAL
STANDARD

ISO
11929

First edition
2010-03-01

DIN ISO 11929 2011-01

**Determination of the characteristic limits
(decision threshold, detection limit and
limits of the confidence interval) for
measurements of ionizing radiation —
Fundamentals and application**

*Détermination des limites caractéristiques (seuil de décision, limite de
détection et extrémités de l'intervalle de confiance) pour mesurages de
rayonnements ionisants — Principes fondamentaux et applications*



ISO 11929 (2010) wurde im Jahr 2019 revidiert.

INTERNATIONAL
STANDARD

ISO
11929-1

Second edition
2019-02

Determination of the characteristic limits (decision threshold, detection limit and limits of the coverage interval) for measurements of ionizing radiation — Fundamentals and application —

**Part 1:
Elementary applications**

Détermination des limites caractéristiques (seuil de décision, limite de détection et extrémités de l'intervalle de confiance) pour mesurages de rayonnements ionisants — Principes fondamentaux et applications —

Partie 1: Applications élémentaires

INTERNATIONAL
STANDARD

ISO
11929-2

Second edition
2019-02

Determination of the characteristic limits (decision threshold, detection limit and limits of the coverage interval) for measurements of ionizing radiation — Fundamentals and application —

**Part 2:
Advanced applications**

Détermination des limites caractéristiques (seuil de décision, limite de détection et extrémités de l'intervalle de confiance) pour mesurages de rayonnements ionisants — Principes fondamentaux et applications —

Partie 2: Applications avancées

INTERNATIONAL
STANDARD

ISO
11929-3

Second edition
2019-02

Determination of the characteristic limits (decision threshold, detection limit and limits of the coverage interval) for measurements of ionizing radiation — Fundamentals and application —

**Part 3:
Applications to unfolding methods**

Détermination des limites caractéristiques (seuil de décision, limite de détection et extrémités de l'intervalle de confiance) pour mesurages de rayonnements ionisants — Principes fondamentaux et applications —

Partie 3: Applications aux méthodes de déploiement

ISO 11929-4:2021
Guideline to applications

R. Michel, IRS, Leibniz Universität Hannover

ISO 11929:2019

Die Normen ISO 11929:2010 und DIN/ISO 11929:2011 benutzten ausschließlich den GUM (ISO 1995).

ISO 11929:2019 wurde DIN ISO 11929:2020.

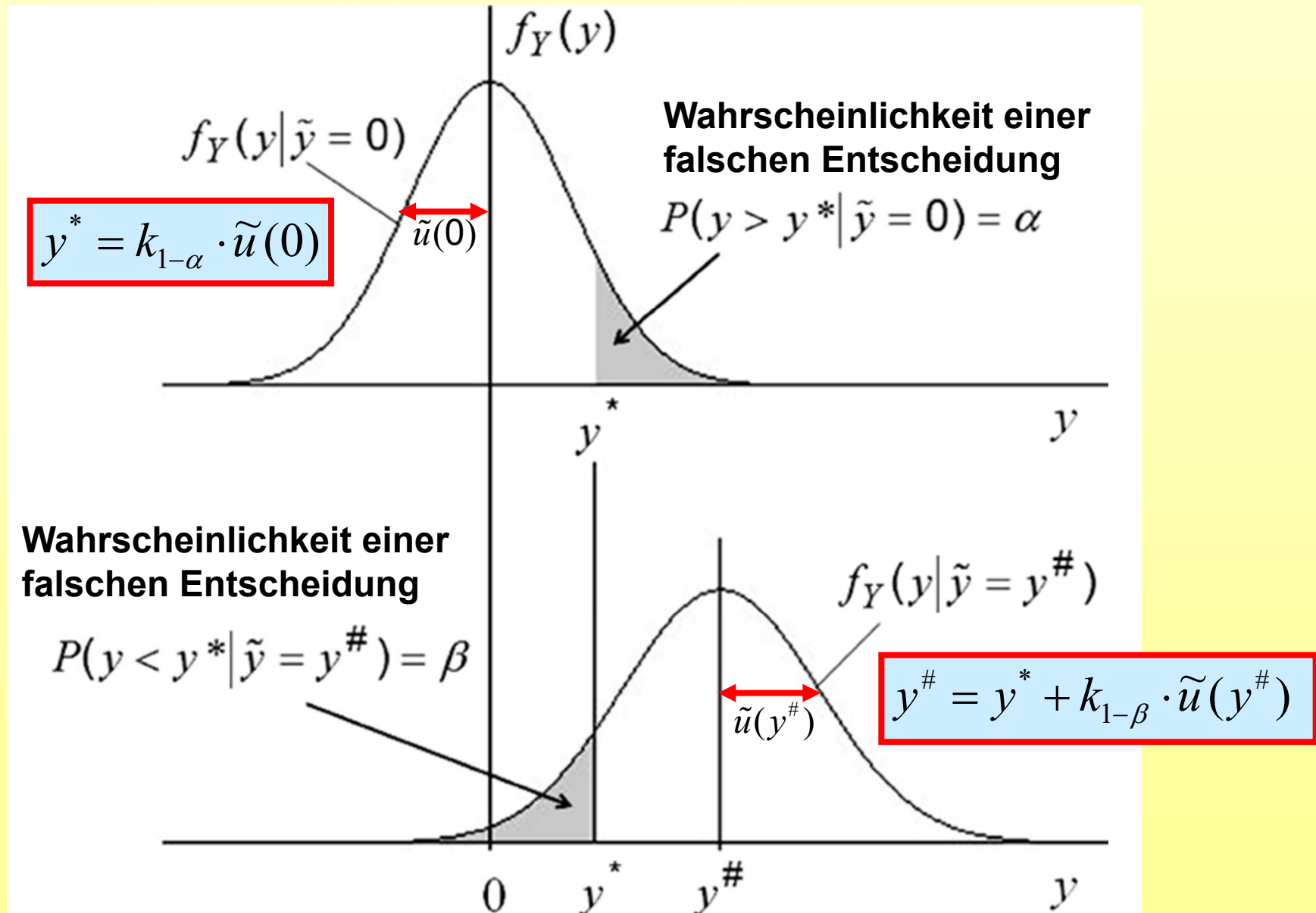
Die revidierte ISO 11929:2019 teilt die Norm in mehrere Teile auf.

- **ISO 11929-1:2019 enthält die alte ISO 11929:2010 und basiert ausschließlich auf dem GUM (JCGM 100:2008, ISO 1995).**
- **ISO 11929-2:2019 öffnet die Norm für das GUM Suppl. 1 (JCGM 101:2008) und erlaubt die Ermittlung der charakteristische Grenzen mittels Monte Carlo Methoden.**
- **ISO 11929-3:2019 befasst sich mit Entfaltungungsverfahren nach GUM.**
- **ISO 11929-4:2021 ist ein Beispielblatt. Das alte Beiblatt zu DIN ISO 11929 bleibt erhalten. ISO 11929-4:2021 ist dazu komplementär.**

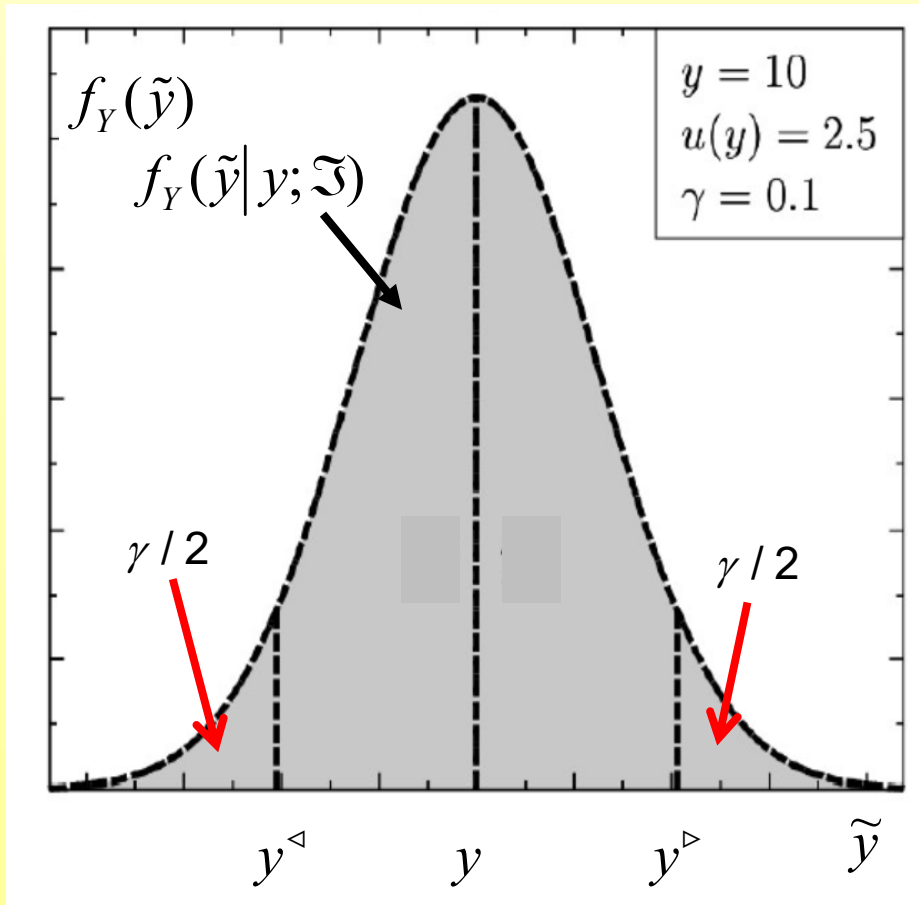
Das Konzept der charakteristischen Grenzen nach ISO 11929

- die **Erkennungsgrenze** (decision threshold) entscheidet die Frage, ob unter den gemessenen Signalen ein Beitrag der Probe ist. **Ein Messwert ist mit der Erkennungsgrenze zu vergleichen.**
- die **Nachweisgrenze** (detection limit) nennt den kleinsten wahren Wert des Probenbeitrages, der zuverlässig gemessen werden kann. **Die Nachweisgrenze ist mit einem Richtwert (geforderte Nachweisgrenze) zu vergleichen.**
- ein **Überdeckungsbereich** (coverage interval) enthält den wahren Wert der Messgröße mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit. **Er dient zur Beurteilung der Konformität mit Anforderungen.**

Erkennungsgrenze y^* und Nachweisgrenze $y^\#$



Das probabilistisch symmetrische Überdeckungsintervall für $u_{\text{rel}}(y) = u(y)/y \leq 0,25$ mit GUM



$$y^{\triangleleft}, y^{\triangleright} = y \pm k_{1-\gamma/2} \cdot u(y)$$

Allgemeine Definition:

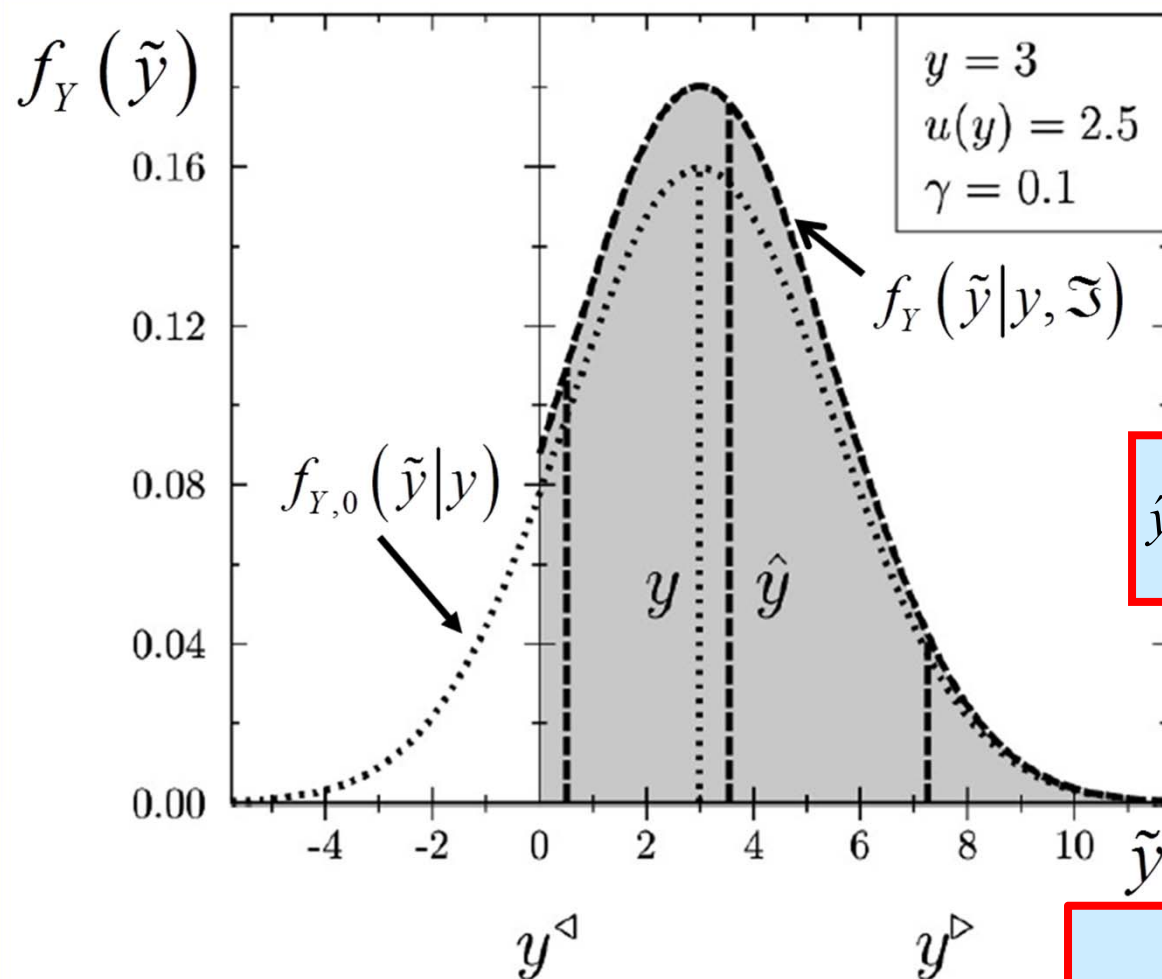
$$P(y^{\triangleleft} < \tilde{y} < y^{\triangleright} | y) = \frac{1}{I_0} \int_{y^{\triangleleft}}^{y^{\triangleright}} f_Y(\tilde{y}|y) \cdot H(\tilde{y}) \, d\tilde{y} = 1 - \gamma$$

$$P(\tilde{y} < y^{\triangleleft} | y) = \frac{1}{I_0} \int_0^{y^{\triangleleft}} f_Y(\tilde{y}|y) \cdot H(\tilde{y}) \, d\tilde{y} = \gamma/2$$

$$P(\tilde{y} > y^{\triangleright} | y) = \frac{1}{I_0} \int_{y^{\triangleright}}^{\infty} f_Y(\tilde{y}|y) \cdot H(\tilde{y}) \, d\tilde{y} = \gamma/2$$

$$I_0 = \int_0^{+\infty} f_Y(\eta|y) \cdot H(\tilde{y}) \, d\eta$$

Das probabilistisch symmetrische Überdeckungsintervall für $u_{\text{rel}}(y) = u(y)/y > 0,25$ und der beste Schätzwert mit GUM



$$y^\Delta = y - k_p \cdot u(y); p = \omega \cdot (1 - \gamma/2)$$

$$y^\nabla = y + k_q \cdot u(y); q = 1 - \omega \cdot \gamma/2$$

$$\hat{y} = y + \frac{u(y) \cdot \exp(-y^2 / (2 \cdot u^2(y)))}{\kappa \sqrt{2\pi}}$$

$$u(\hat{y}) = \sqrt{u^2(y) - (\hat{y} - y) \cdot \hat{y}}$$

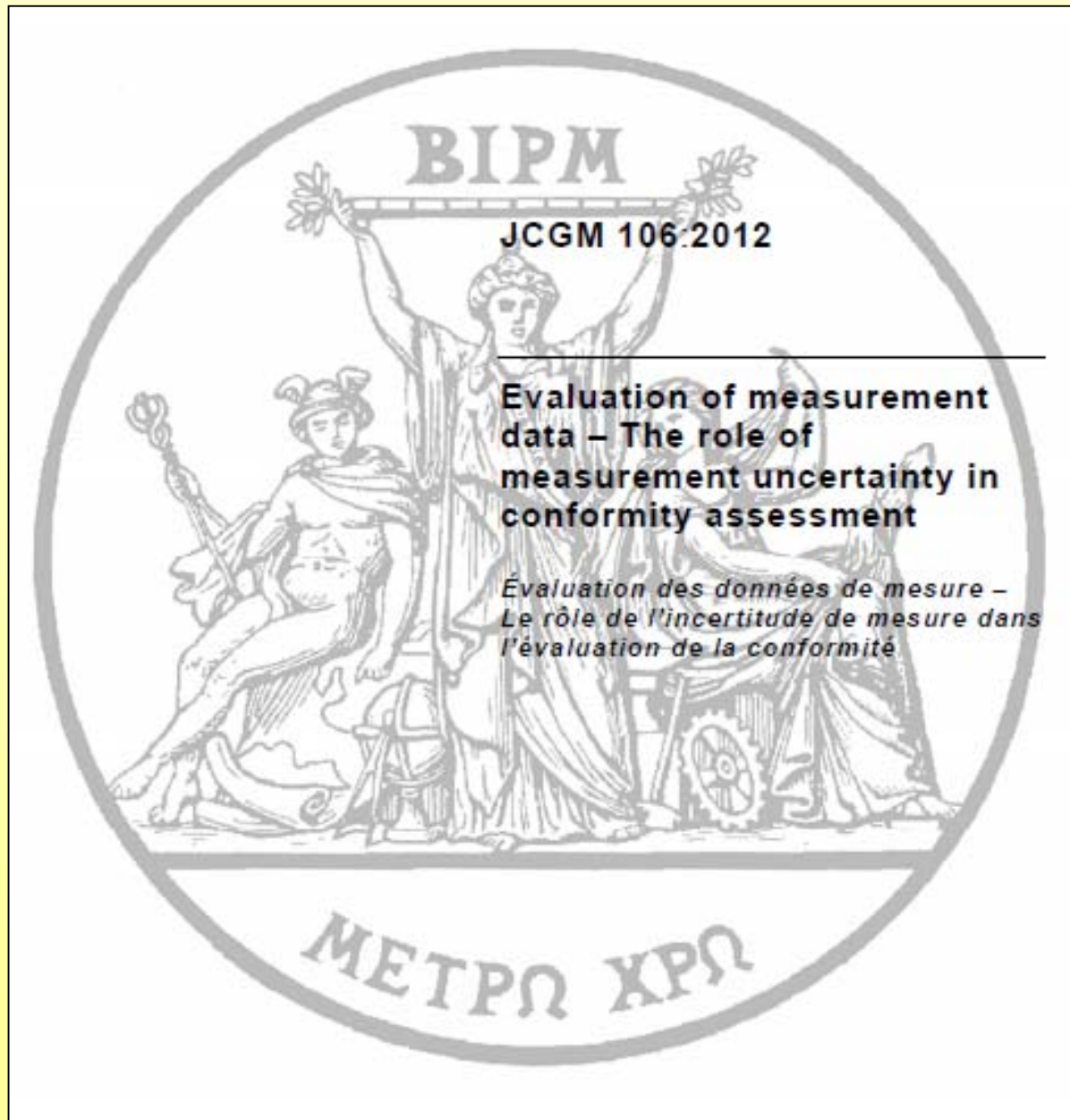
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y/u(y)} \exp(-\frac{v^2}{2}) dv = \Phi[y/u(y)]$$



Strahlenschutzkommission

**Methodik zur Berücksichtigung von
Messunsicherheiten bei messtechnischen
Prüfungen im Geltungsbereich der
Röntgenverordnung und der
Strahlenschutzverordnung**

**Empfehlung der Strahlenschutzkommission
verabschiedet auf der 228. Sitzung der SSK am 16.9.2016**



Conformity assessment



JCGM
Joint Committee for
Guides in Metrology
(BIPM, IEC, IFCC,
ILAC, ISO, IUPAC,
IUPAP and OIML)

Free download under www.bipm.org

R. Michel, IRS, Leibniz Universität Hannover

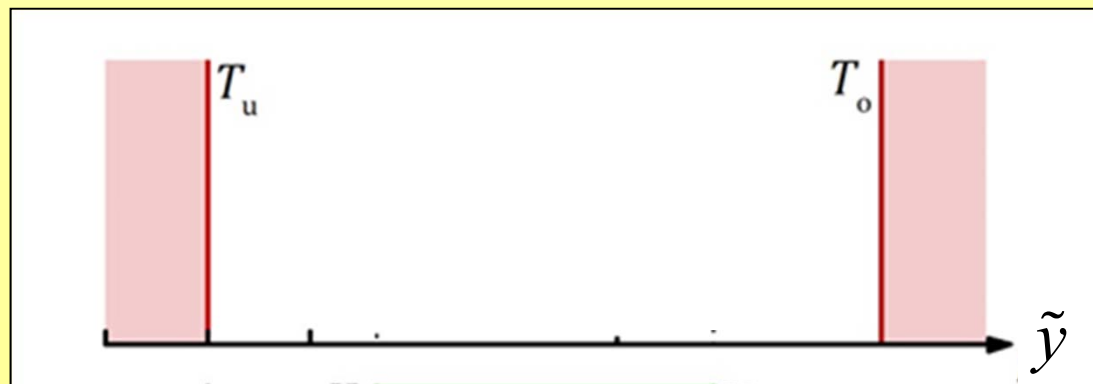
Toleranz- und Konformitätsbereich

- Anforderungen werden durch die Angabe von einseitig oder zweiseitig begrenzten Toleranzbereichen festgelegt, in denen der wahre Wert der Messgröße mit einer festgelegten Wahrscheinlichkeit liegen soll.
- Die Angabe eines Konformitätsbereichs erleichtert den Nachweis von Konformität.

Der Toleranzbereich $[T_u, T_o]$

Befindet sich der wahre Wert \tilde{y} unterhalb T_u oder oberhalb T_o in den roten Bereichen, ist die Anforderung nicht erfüllt.

Ein Messwert y ist ein Schätzwert des unbekannten und unerkennbaren wahren Wertes \tilde{y} der Messgröße Y sind die möglichen Messwerte y . Die dem Messwert zugeordnete Messunsicherheit $u(y)$ quantifiziert die Dispersion der möglichen wahren Werte.





Die Wahrscheinlichkeit für falsche Entscheidungen zugunsten von Konformität

Da über den wahren Wert einer Messgröße nur Wahrscheinlichkeitsaussagen gemacht werden können, besteht die Möglichkeit sich fälschlicher Weise zugunsten von Konformität zu entscheiden.

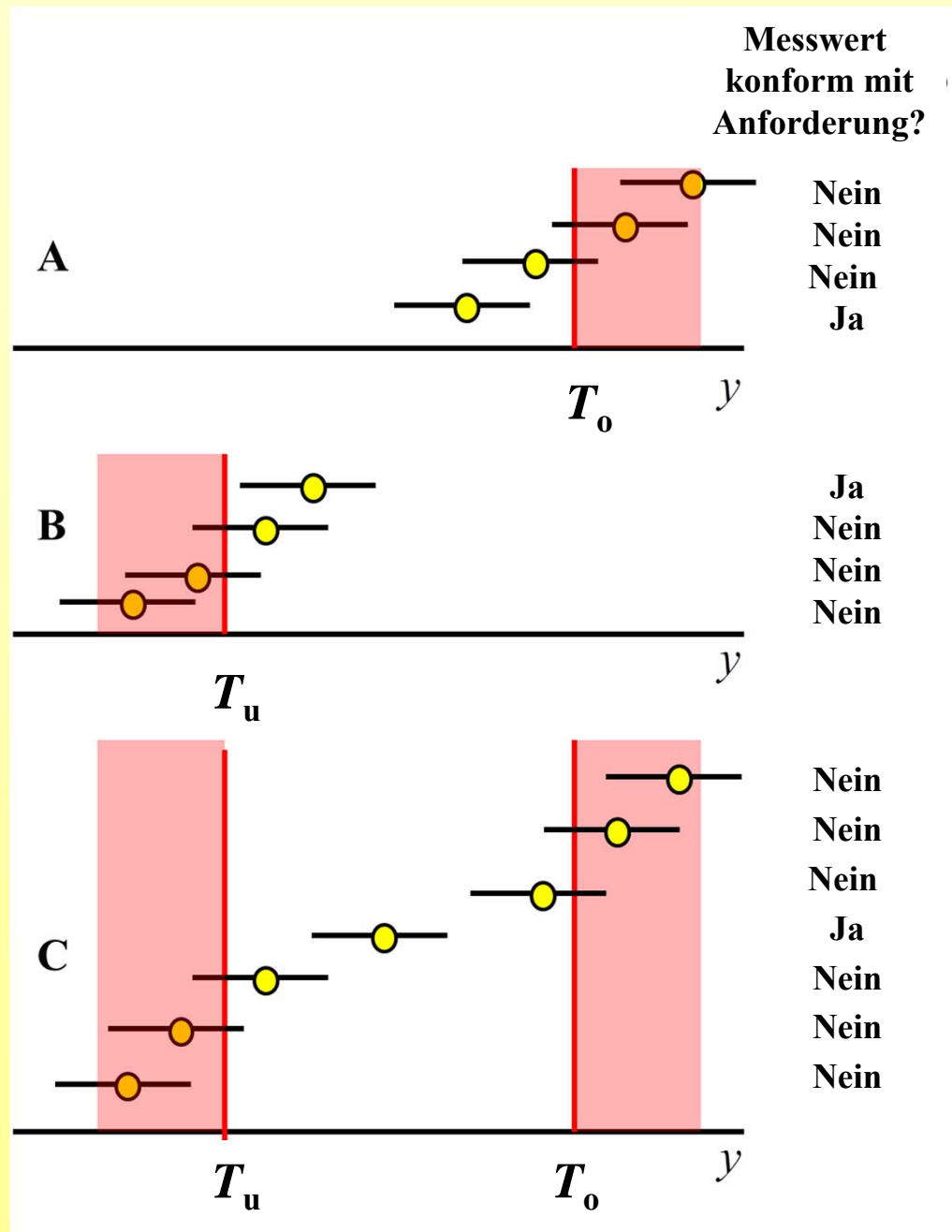
Die SSK empfiehlt, eine Wahrscheinlichkeit von 5% für falsche Entscheidungen zuzulassen.

Konformität mit Anforderungen

- ❖ für einen einseitig nach oben beschränkten Toleranzbereich (A),
- ❖ einen einseitig nach unten beschränkten Toleranzbereich (B) und
- ❖ einen zweiseitig beschränkten Toleranzbereich (C).

Die gelben Symbole mit schwarzen Balken stellen Messwerte mit Überdeckungs-bereichen dar.

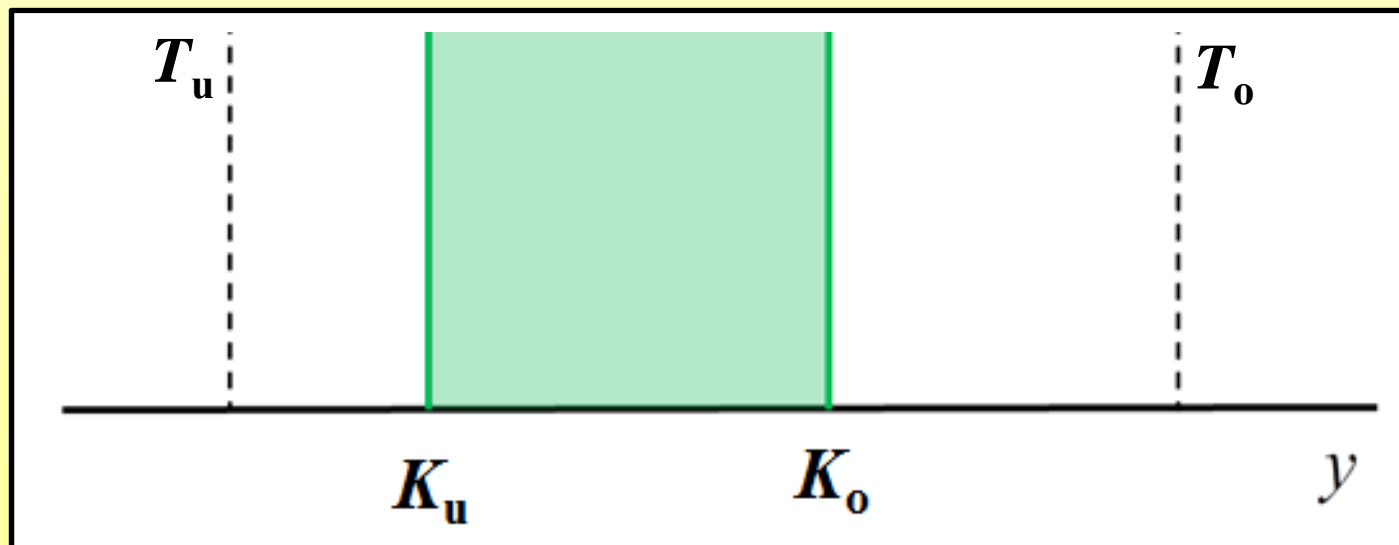
Die SSK empfiehlt Überdeckungswahrscheinlichkeiten von 90 % in den Fällen A und B und 95 % im Fall C.



Der Konformitätsbereich $[K_u, K_o]$



Befindet sich ein Messwert y innerhalb des Konformitätsbereichs, kann ohne weitere Betrachtung der Unsicherheit entschieden werden, dass die Messung konform ist mit den Anforderungen.



Die Festlegung eines Konformitätsbereichs setzt die Kenntnis der Messunsicherheit als Funktion des Messwertes voraus.

Allgemeine Bedingungen für Konformität und für die Festlegung von Konformitätsbereichen.



Toleranzbereich	Bedingung für Konformität	Konformitätsbereich $[K_u, K_o]$
Einseitig nach unten begrenzt $[T_u, +\infty]$	$P(\tilde{y} < T_u y, u(y)) = \int_{T_u}^{+\infty} f_Y(\tilde{y} y, \mathfrak{Y}) d\tilde{y} \leq \delta$	$P(\tilde{y} < T_u y = K_u, u(y = K_u)) = \delta$ $K_o = +\infty$
Einseitig nach oben begrenzt $[0, T_o]$	$P(\tilde{y} > T_o y, u(y)) = \int_{-\infty}^{T_o} f_Y(\tilde{y} y, \mathfrak{Y}) d\tilde{y} \leq \delta$	$P(\tilde{y} > T_o y = K_o, u(y = K_o)) = \delta$ $K_u = 0$
Beidseitig begrenzt $[T_u, T_o]$	$P(\tilde{y} < T_u \vee \tilde{y} > T_o y, u(y)) = \int_{T_u}^{T_o} f_Y(\tilde{y} y, \mathfrak{Y}) d\tilde{y} \leq 1 - \delta$ mit den Nebenbedingungen $P(\tilde{y} < T_u y, u(y)) \leq \delta / 2$ und $P(\tilde{y} > T_o y, u(y)) \leq \delta / 2$	$P(\tilde{y} < T_u y = K_u, u(y = K_u)) = \delta / 2$ und $P(\tilde{y} > T_o y = K_o, u(y = K_o)) = \delta / 2$

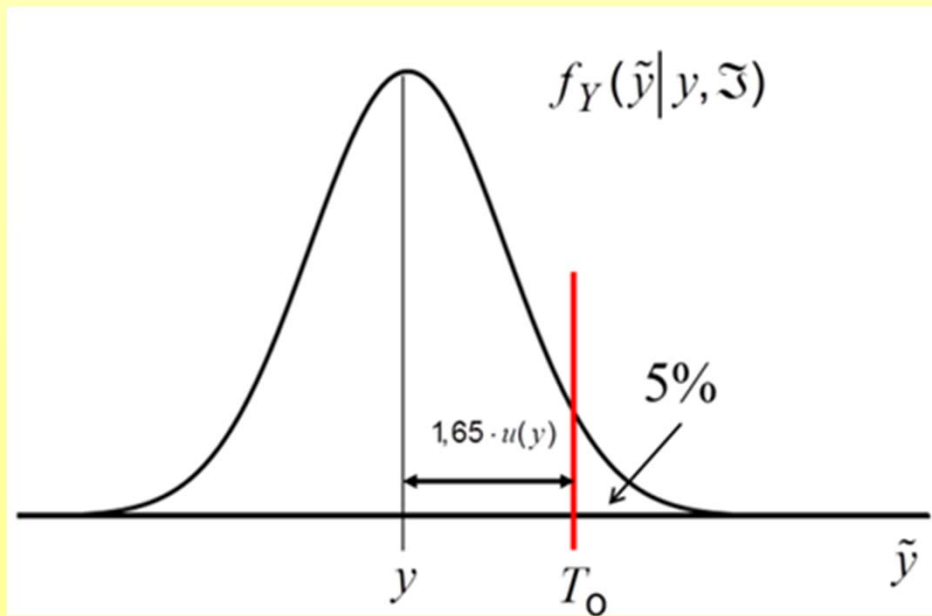
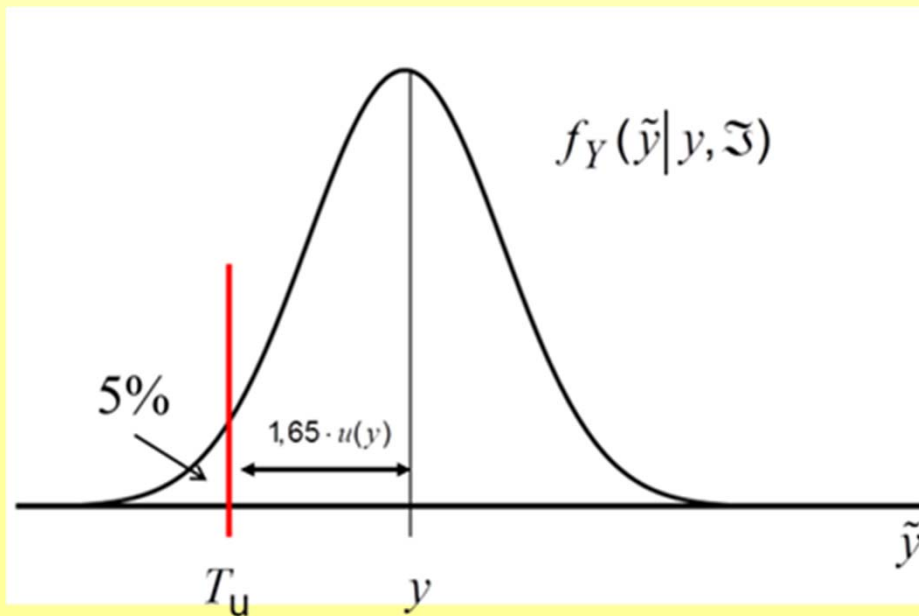
**Bedingungen für Konformität und für die
Festlegung von Konformitätsbereichen bei
Anwendung des GUM bzw. ISO 11929-1 für
 $\delta = 0,05$ und $u_{\text{rel}}(y) \leq 0,25$.**



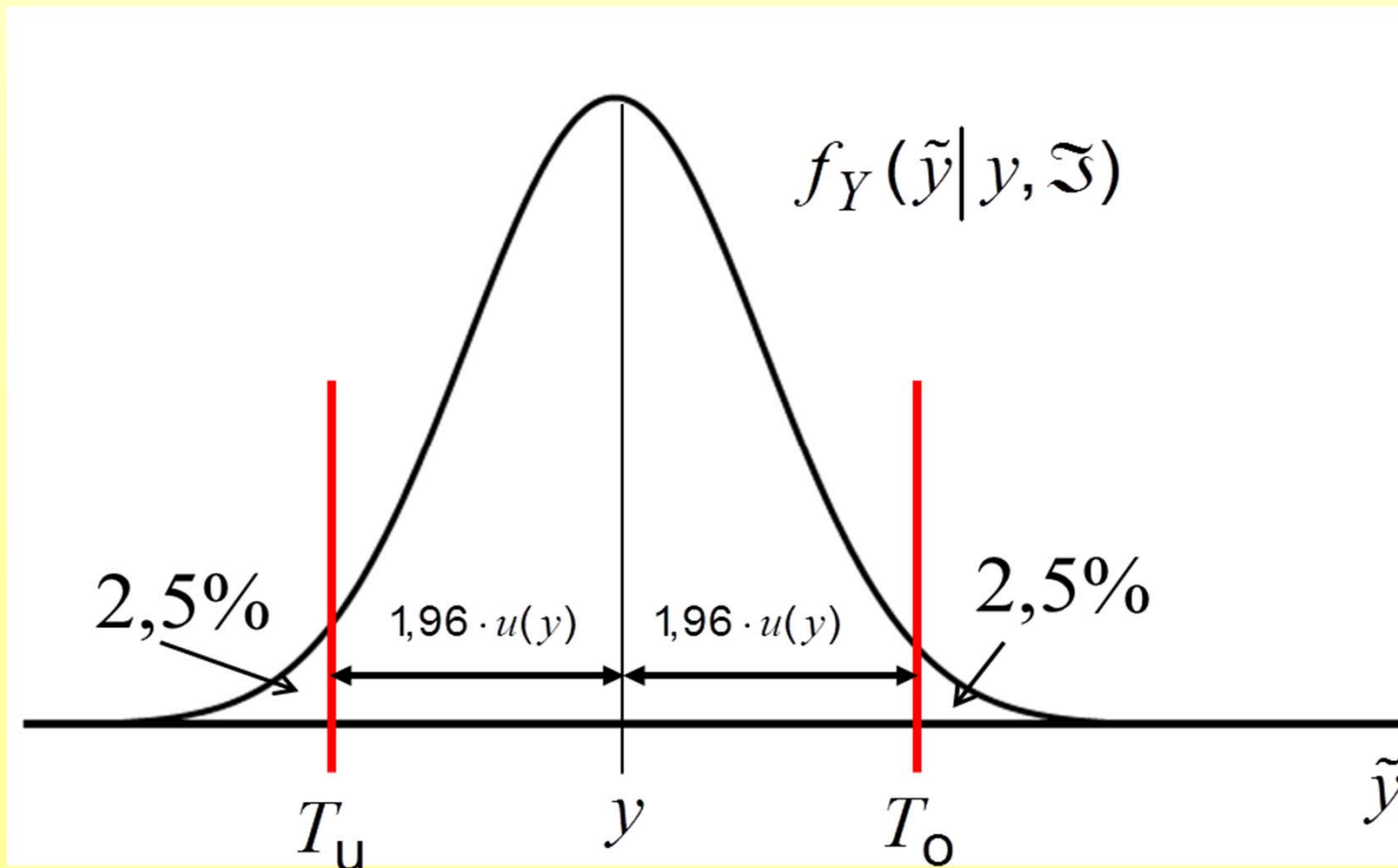
Toleranzbereich	Bedingung für Konformität	Konformitätsbereich $[K_u, K_o]$
Einseitig nach unten begrenzt $[T_u, +\infty]$	$y - 1,65 \cdot u(y) \geq T_u$	$K_u = T_u + 1,65 \cdot u(y = K_u)$ $K_o = +\infty$
Einseitig nach oben begrenzt $[0, T_o]$	$y + 1,65 \cdot u(y) \leq T_o$	$K_o = T_o - 1,65 \cdot u(y = K_o)$ $K_u = 0$
Beidseitig begrenzt $[T_u, T_o]$	$y - 1,96 \cdot u(y) \geq T_u$ und $y + 1,96 \cdot u(y) \leq T_o$	$K_u = T_u + 1,96 \cdot u(y = K_u)$ $K_o = T_o - 1,96 \cdot u(y = K_o)$

Extremfälle bei einseitig begrenzten Toleranzbereichen.

Bei einseitig begrenzten Toleranzbereichen genügt es eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 90% für das probabilistisch symmetrische Überdeckungsintervall zu fordern, um die Wahrscheinlichkeit für falsche Entscheidungen zugunsten von Konformität kleiner als 5% zu halten.



Extremfall bei zweiseitig begrenztem Toleranzbereich, der es notwendig macht, bei dieser Anforderung die Überdeckungswahrscheinlichkeit mit 95% anzusetzen. In diesem Extremfall ist die Unsicherheit so groß, dass das probabilistisch symmetrische Überdeckungsintervall zur Wahrscheinlichkeit 95% gerade den gesamten Toleranzbereich ausfüllt.



Es ist nichts Geheimnisvolles an
Unsicherheit, Nachweisbarkeit und
Konformität.



$$f(\tilde{y}|y, \mathfrak{T})$$

Bayes Theorie der Messunsicherheiten und charakteristische Grenzen

- K. Weise, W. Wöger, Eine Bayessche Theorie der Messunsicherheit, PTB-Bericht N-11, 1992.
- K. Weise, W. Wöger, A Bayesian theory of measurement uncertainty. Meas. Sci. Technol. 4, 1-11 (1993).
- K. Weise, W. Wöger, Messunsicherheiten und Messdatenauswertung, Wiley-VCH, Weinheim (1999).
- K. Weise, Bayesian-statistical detection limit, decision threshold, and confidence interval in nuclear radiation measurement, Kerntechnik 63 (1997) 214 – 224.
- R. Michel, Quality Assurance of Nuclear Analytical Techniques Based on Bayesian Characteristic Limits, Proceedings MTAA-10, J. Radioanal. Chem. 245 (2000) 137 – 144.
- R. Michel, 2016. Measuring, estimating, and deciding under uncertainty, Applied Radiation and Isotopes, pp. 6-11, DOI: 10.1016/j.apradiso.2015.12.013
- R. Michel, 2017. Uncertainty, detectability, and conformity in measurements of ionizing radiation, Japan Journal Health Phys. 52 (3) 179 – 191, DOI: 10.5453/jhps.52.179
- K. Weise, R. Michel, Erkennungsgrenze, Nachweisgrenze und Vertrauensbereich in der allgemeinen Kernstrahlungsspektrometrie, Kerntechnik 60 No. 4 (1995) 189 - 196
- K. Weise, K. Hübel, R. Michel, E. Rose, M. Schläger, D. Schrammel, M. Täschner, Nachweisgrenzen und Erkennungsgrenzen bei Kernstrahlungsmessungen: Spezielle Anwendungen, ISSN 1013-4506, ISBN 3-8249-0904-9, FS-04-127-AKSIGMA, TÜV Verlag Rheinland (2004).
- K. Weise, The Bayesian count rate probability distribution in measurement of ionizing radiation by use of a ratemeter, PTB Ra-44 (2004).
- K. Weise, K. Hübel, R. Michel, E. Rose, M. Schläger, D. Schrammel, M. Täschner, Determination of the detection limit and decision threshold for ionizing-radiation measurements: fundamentals and particular applications, ISSN 1013-4506, ISBN 3-8249-0945-6, FS-05-129-AKSIGMA, TÜV Verlag Rheinland, Köln (2005).
- K. Weise, G. Kanisch, R. Michel, M. Schläger, D. Schrammel, M. Täschner, Bayesian decision threshold, detection limit and confidence limits in ionizing radiation measurements, Radiation Protection Dosimetry 121(1) (2006) 52 – 63.
- K. Weise, G. Kanisch, R. Michel, M. Schläger, D. Schrammel, M. Täschner, Monte Carlo determination of the characteristic limits in measurement of ionising radiation: Fundamentals and numerics, Radiation Protection Dosimetry 135 No. 3 (2009) 169 – 196; doi:10.1093/rpd/ncp105
- K. Weise, G. Kanisch, R. Michel, M. Schläger, D. Schrammel, M. Täschner, Characteristics values in measurement of ionizing radiation – material for a critical discussion on fundamentals and alternatives, FS-2013-167-AKSIGMA, Verlag TÜV Rheinland, 2013

R. Michel, IRS, Leibniz Universität Hannover

Literatur zur Bayes Statistik

Th. Bayes, Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances, The Philosophical Transactions (1763), 53, 370-418, reprinted G.A. Barnard; Thomas Bayes, Biometrika 45, No.3/4. (Dec. 1958) 293 - 315.

E.T. Jaynes, Probability Theory: The Logic of Science, © 1995, Edwin T. Jaynes, <http://omega.albany.edu:8008/JaynesBook.html> (14.01.2007) or <http://bayes.wustl.edu/etj/prob/book.pdf> (14.01.2007).

E.T. Jaynes, Papers on Probability, Statistics and Statistical Physics, R.D. Rosenkrantz (ed.) Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, reprinted 1989.

J.M. Bernardo, Bayesian Statistics, in: Probability and Statistics (R. Viertl, ed.) Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS). Oxford, UK: UNESCO, 2003.

P. C. Gregory, Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences, Cambridge University Press, 2005.